

6.1 Ausklammern

Thema: Fortsetzung von Kp. 2.3, Aufgabe 235.
 Neu: Wenn nichts anderes verlangt wird, ist der ggT auszuklammern.

611–12 Vorbereitung: Teiler von Monomen (s. Theorie S. 81).

613–16 Monome ausklammern.

Z 61 Auch Polynome ausklammern.

Das Prinzip der Substitution (Fortsetzung von Algebra 1, Kp. 5.3).

611. Gemäss Theorie S. 81 verzichten wir auf die Angabe von Teilern mit Minuszeichen.

- | | |
|--|--------------------------------|
| a. 1; a; a ² ; a ³ | c. 1; 2; 4; e; 2e; 4e |
| b. 1; 2; x; 2x; x ² ; 2x ² | d. 1; 3; r; s; 3r; 3s; rs; 3rs |

612. Siehe die Bemerkung von 611.

- | | | |
|----------------|-------------------------|--|
| a. 1; 2; 4 | c. 1; a; a ² | e. 1; 2; x; 2x; x ² ; 2x ² |
| b. 1; 2; e; 2e | d. 1; a; b; ab | f. 1; 3; x; y; 3x; 3y; xy; 3xy |

613. Zum Begriff des ggT siehe Theorie S. 81.

- | | | |
|---------------------------|----------------------------|---|
| a. 6(x + y) | e. a(a + b) | i. 2a ² (a ² - 2) |
| b. 3(3a - 2b) | f. x(y - 1) | k. 2f ² (1 + 2e) |
| c. 2(4p ² + 1) | g. p ² (3p + 2) | l. 16r(3r - 1) |
| d. 12(ef - 1) | h. 3b(3a - b) | m. 7q(5p + 6q) |

614. a. 7(a² - 2ab + 3b²)

- | | |
|---|--|
| b. x(x ² + 3x - 3) | g. kz(k ² - kz - z ²) |
| c. 3k(3k ² + 2k + 1) | h. 2c(c ² + cd + 2d ²) |
| d. 4z ² (3z ² - z + 2) | i. 4xy(3x - 1 - 2y) |
| e. 2a(3a - 1 - 2b) | k. 5m ² n ² (7 + n - 3n ²) |
| f. 4e(e ² - 2ef - f ²) | l. 9ac(b ² - 2bc - 3ac) |
| | m. 8a ² bc(3a + 1 - 2b) |

615. Vorbereitung zu 635.

- | | | |
|--------------|----------------------------|----------------------------------|
| a. -1(a + b) | d. -2(4p + 1) | g. -1(x ² - 2x + 3) |
| b. -x(x + 1) | e. -1(r ² - 2s) | h. -2a(a ² + 3a + 4) |
| c. -b(a - b) | f. -4p(p + 2) | i. -pq ² (-1 + p + q) |

*616. Polynome mit nicht-ganzen Koeffizienten.

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|------------------|
| a. $\frac{1}{8}(3a + 5)$ | d. $\frac{1}{2}p(p + 1)$ | g. 0,9u(5u - 4) |
| b. $\frac{1}{4}(2x - 3y)$ | e. $\frac{1}{10}e(e - 5f)$ | h. 0,12(5y + 1) |
| c. $\frac{1}{6}(3p^2 + 4)$ | f. $\frac{1}{20}(5k - 4)$ | i. 0,1a(5a + 6b) |

6101. a. $(x-3)(x+5)$ d. $p(q+4)(p+1)$
 b. $(s+t)(s-t)$ e. $2(y-z)(x-2)$
 c. $(ab-1)^2$ f. $5e(e-1)^2$
6102. a. $(c-1)(c-5)$ d. $(2a-3b)(3a-3b) = 3(a-b)(2a-3b)$
 b. $(e+5)(e+4)$ e. $(p+3)(3p-6) = 3(p-2)(p+3)$
 c. $(n+1)(3m-n)$ f. $(x-y)(-3x+6) = 3(2-x)(x-y)$
6103. a. $(s-t)(s+t)$ d. $(a-b)(6a-3b) = 3(2a-b)(a-b)$
 b. $(p+q)(3p-2q)$ e. $(2p-5)(5p-5) = 5(p-1)(2p-5)$
 c. $(x-1)^2$ f. $(2x-y)(-3x-3y) = -3(x+y)(2x-y)$
6104. a. $pr^2(2x-3y)$ d. $ax(6x-3) = 3ax(2x-1)$
 b. $2mn \cdot 2s = 4mns$ e. $3r^2(4r-4h) = 12r^2(r-h)$
 c. $abc(4a^2-3a-3)$ f. $2az(4a-2z) = 4az(2a-z)$
6105. a. $(f+8)(f+3)$ d. $(a-2)(3a-3) = 3(a-1)(a-2)$
 b. $(a+b)(2b-a)$ e. $(e-1)(2e+4) = 2(e+2)(e-1)$
 c. $(s-t)(s+t)$ f. $(k+z)(-3k+6) = 3(2-k)(k+z)$
6106. a. $x(x-2y)[(3y+2x) - (x+3y) - (x-2y)] = x(x-2y) \cdot 2y = 2xy(x-2y)$
 b. $a^2(a-3)[(a-3) - (a-2) + (2a+5)] = a^2(a-3)(2a+4) = 2a^2(a-3)(a+2)$
 c. $(z-3)(z+5)[(z-3) - (z+5) + (3z+5)] = (z-3)(z+5)(3z-3) = 3(z-3)(z+5)(z-1)$
6107. a. $(x-3)(x-1)$ d. $(x-1)^2$
 b. $(2e-3)(e+1)$ e. $(a-1)(a+b)$
 *c. $(a-2)(7a+14) = 7(a-2)(a+2)$ *f. $(5e-4)(5e^2-10) = 5(5e-4)(e^2-2)$
6108. a. $p(p+2)[8(p+1) - 6(p+3) + (p+5)] = p(p+2)(3p-5)$
 b. $3ps(2r-s)[2(3r+s) - 3(2r-s) - (r+4s)] = 3ps(2r-s)(s-r)$
 c. $ab(a+b)[a(a+3b) - 4ab + b(a-2b)] = ab(a+b)(a^2-2b^2)$
6109. a. $3x(2x+5)[(3x-1)(x+1) - (3x-4)(x+2)] = 21x(2x+5)$
 b. $(2e+1)(e+1)[(e+1)(e-2) - (e-1)^2] = (2e+1)(e+1)(e-3)$
 *c. $a(5a-2)[(a+4)^2 - (a+2)^2] = a(5a-2)(4a+12) = 4a(5a-2)(a+3)$

* Aufgaben, zu deren Lösung mehr als drei Schritte nötig sind.

6.2 Weitere Faktorzerlegungen

Thema: Fortsetzung von Kp. 2.4 : Umkehraufgaben.

621–24 Faktorisieren in 1 Schritt.

625–26 Faktorisieren in 2 Schritten.

Z 62 Faktorisieren in 2–4 Schritten.

621. a. $(e+1)(e-1)$ d. $(2v+3)(2v-3)$ g. $(a^2+b)(a^2-b)$ k. $(2p+q^2)(2p-q^2)$
b. $(f+5)(f-5)$ e. $(4x+9)(4x-9)$ h. $(a^3+3)(a^3-3)$ l. $(3s^2+5t)(3s^2-5t)$
c. $(k+8)(k-8)$ f. $(6z+7)(6z-7)$ i. $(ab^2+c)(ab^2-c)$ m. $(4x^3+9y^2)(4x^3-9y^2)$
622. a. $(a+3)^2$ e. $(d-6)^2$ i. $(2g-3f)^2$
b. $(b+5)^2$ f. $e^2-8ef+4f^2$ k. $(3h^2+5)^2$
c. $(p+2q)^2$ g. $(x^2-8)^2$ l. $(5n^2-2)^2$
d. $(x+4y)^2$ h. $(s-7t)^2$ m. $(3x+4y)^2$
623. a. $(a+1)(a+2)$ e. $(x-1)(x-8)$ i. $(p-4q)(p-8q)$
b. $(b+3)(b+4)$ f. $z^2-10z+18$ k. $(y+3z)(y+8z)$
c. $(e+2)(e+8)$ g. $(s-4)(s-5)$ l. $(m-n)(m-12n)$
d. $(z+2)(z+6)$ h. $(t-2)(t-18)$ m. $(p+2q)(p+9q)$
624. a. $(a+3)(a-1)$ e. $(x-9)(x+4)$ i. $(m+8n)(m-3n)$
b. $(c+10)(c-2)$ f. $(r-10)(r+1)$ k. $(p-9q)(p+q)$
c. $(v+6)(v-5)$ g. $k^2-2k-18$ l. $(u+16v)(u-2v)$
d. $(w+8)(w-2)$ h. $(s-6)(s+4)$ m. $(v-12w)(v+w)$
625. a. $3(2x+3)(2x-3)$ e. $5(a-b)^2$ i. $3ab(a+3)(a-2)$
b. $2e(e+2)(e-2)$ f. $a(b+1)(b+3)$ k. $3y(x-6)(x+1)$
c. $xy(x+y)(x-y)$ g. $4p(p-3)(p-4)$ l. $2z(z+4k)(z-2k)$
d. $2ab(3a+4b)(3a-4b)$ h. $x^2(x-2y)(x-3y)$ m. $4(p-5q)(p+4q)$
626. a. $(a^2+1)(a+1)(a-1)$ e. $(a^2+6)(a+1)(a-1)$ i. $(k+2)(k+1)(k-1)(k-2)$
b. $(c^2+9)(c+3)(c-3)$ f. $(e^2+2)(e+4)(e-4)$ k. $(s+3)(s+2)(s-2)(s-3)$
c. $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$ g. $(n^2-3)(n-2)(n+2)$ l. $(t+1)^2(t-1)^2$
d. $(p^2+4q^2)(p+2q)(p-2q)$ h. $(z^2-2)(z-3)(z+3)$ m. $(v+2)^2(v-2)^2$

6201. Bsp. f.: $(k^4+z^4)(k^4-z^4) = (k^4+z^4)(k^2+z^2)(k^2-z^2) = (k^4+z^4)(k^2+z^2)(k+z)(k-z)$

- a. $3(x^2+4)(x+2)(x-2)$ c. $3ab(1+b^2)(1+b)(1-b)$ e. $(b^4+1)(b^2+1)(b+1)(b-1)$
 b. $e(e^2+9)(e+3)(e-3)$ d. $2p^2(4p^2+q^2)(2p+q)(2p-q)$ f. $(k^4+z^4)(k^2+z^2)(k+z)(k-z)$

6202. Bsp. i.: $9m^2(m^4-2m^2+1) = 9m^2(m^2-1)(m^2-1) = 9m^2(m+1)(m-1)(m+1)(m-1)$

- a. $6(p^2+5)(p+2)(p-2)$ d. $2(a^2-5)(a-1)(a+1)$ g. $3(e+2)^2(e-2)^2$
 b. $x(x^2+5)(x+1)(x-1)$ e. $b(b^2-8)(b-4)(b+4)$ h. $2f(f+2)(f+1)(f-1)(f-2)$
 c. $2kz(z^2+2)(z+3)(z-3)$ f. $3c^2(c^2+8)(c^2+2)$ i. $9n^2(n+1)^2(n-1)^2$

6203. Bsp. g.: $xy(x^2-2x-8) = xy(x-4)(x+2)$

- a. $(p-2q)(2p-q)(2p+q)$ e. $3s(s-1)^2$
 b. $(y-1)(y+3)^2$ f. $k^2(z+4)(z-1)$
 c. $(b+4)(b-4)(b-1)$ g. $xy(x+2)(x-4)$
 d. $(x+1)^2(x-2)$ h. $4a(a+3)(a-3)$

6204. Bsp. c.: $(e+2)[3(e+2) + e(e+4) - (e-2)] = (e+2)(e^2+6e+8) = (e+2)^2(e+4)$

- a. $(a-1)(a^2-2a+1) = (a-1)^3$
 b. $(n+1)(n^2+n-6) = (n+1)(n-2)(n+3)$
 *c. $(e+2)(e^2+6e+8) = (e+2)^2(e+4)$
 *d. $(x-1)(x^2-2x-8) = (x-1)(x-4)(x+2)$

6205. Bsp.f.: Zwei verschiedene Gliederungen führen zum Ziel:

$$\begin{array}{ll} \text{I/II} \ \& \ \text{III/IV} & e(3f-g) - 1(3f-g) = (3f-g)(e-1) \\ \text{I/III} \ \& \ \text{II/IV} & 3f(e-1) - g(e-1) = (e-1)(3f-g) \end{array}$$

- a. $(a+5)(b+3)$ e. $(a-b)(5+c)$
 b. $(2b+c)(c-4)$ f. $(e-1)(3f-g)$
 c. $(3a+2b)(2c+3d)$ g. $(5x-3y)(6x+1)$
 d. $(a^2+1)(ab-c)$ h. $(5a-2)(3a-b)$

6206. Bsp. c.: $x^2(x+3) - 4(x+3) = (x+3)(x^2-4) = (x+3)(x+2)(x-2)$

- a. $(m+1)(m-1)^2$ d. $(x+3)(x-3)(p+1)(p-1)$
 b. $(a+b)^2(a-b)$ e. $(m+2)(m-2)(m+n)(m-n)$
 c. $(x+3)(x+2)(x-2)$ *f. $(a^2+b^2)(a+b)^2(a-b)^2$

6207. Bsp. d.: $(p^2+4)(p^2-4) - 5p(p^2-4) = (p^2-4)(p^2-5p+4) = (p+2)(p-2)(p-1)(p-4)$

- a. $(a-b)(a+b+1)$ c. $(e+1)^3(e-1)$
 b. $(x+3y)(x-3y-z)$ d. $(p+2)(p-1)(p-2)(p-4)$

* Aufgaben, zu deren Lösung vier Schritte nötig sind.

6.4 Einfache quadratische Gleichungen

Thema: Eine weitere Anwendung des Faktorisierens: Quadratische Gleichungen lösen, deren Lösungen ganzzahlig sind.

641 Grundlegende Einsicht: Aus $A \cdot B = 0$ folgt: $A = 0$ oder $B = 0$.

642–46 Numerische Aufgaben.

647–49 Textaufgaben.

641. a. $a = -b$ b. $a = b$ c. $a = 0$ oder $b = 0$ d. $a = 0$ [$b \neq 0$]

642. a. $L = \{0; 7\}$ c. $L = \{3; -2\}$ e. $L = \{-1, 5\}$
 b. $L = \{0; -4\}$ d. $L = \{-4; 1\}$ f. $L = \{1, 2\}$

643. a. $L = \{0; -3\}$ d. $L = \{3; -3\}$ g. $L = \{0; 4\}$
 b. $L = \{0; 1\}$ e. $L = \{\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\}$ h. $L = \{2; -2\}$
 c. $L = \{0; -1, 5\}$ f. $L = \{1; -1\}$ i. $L = \{\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\}$

644. a. $L = \{2\}$ d. $L = \{2; 4\}$ g. $L = \{4; -5\}$
 b. $L = \{-1\}$ e. $L = \{-2; -3\}$ h. $L = \{5; -3\}$
 c. $L = \{4; 5\}$ f. $L = \{2; 5\}$ i. $L = \{1; -4\}$

645. a. $L = \{4; -3\}$ e. $L = \{0; 3\}$ i. $L = \{2; 3\}$
 b. $L = \{0; 2\}$ f. $L = \{2; -1\}$ k. $L = \{0; \frac{1}{3}\}$
 c. $L = \{3\}$ g. $L = \{2; 1\}$ l. $L = \{6; -4\}$
 d. $L = \{0; -1\}$ h. $L = \{1\}$ m. $L = \{3; -4\}$

646. a. $L = \{1; 4\}$ e. $L = \{8; -2\}$
 b. $L = \{1\}$ f. $L = \{0; 2\}$
 c. $L = \{0; 4\}$ g. $L = \{-1; -2\}$
 d. $L = \{4; -2\}$ h. $L = \{1; -1\}$

647. Gesuchte Zahl: x

a. $4x^2 = 9$
 $(2x + 3)(2x - 3) = 0$ 1,5 oder -1,5

b. $x^2 + 15 = 8x$
 $(x - 3)(x - 5) = 0$ 3 oder 5

c. $x^2 + 4x = -4$
 $(x + 2)^2 = 0$ -2

d. $3x^2 = 4x$
 $x(3x - 4) = 0$ 0 oder $\frac{4}{3}$

648. a. $l : 3x$
 $b : x$
 $x \cdot 3x = 48$
 $(x-4)(x+4) = 0$
 $l : 12 \text{ cm}$
 $b : 4 \text{ cm}$

b. $l : x + 13$
 $b : x$
 $x(x+13) = 48$
 $(x-3)(x+16) = 0$
 $l : 16 \text{ cm}$
 $b : 3 \text{ cm}$

c. $l : 2x - 4$
 $b : x$
 $x(2x-4) = 48$
 $(x-6)(x+4) = 0$
 $l : 8 \text{ cm}$
 $b : 6 \text{ cm}$

d. $l : 26 - x$
 $b : x$
 $x(26-x) = 48$
 $(x-2)(x-24) = 0$
 $l : 24 \text{ cm}$
 $b : 2 \text{ cm}$

649. a. $l : 20 - x$
 $b : x$
 $x(20-x) = 36$
 $(x-2)(x-18) = 0$
 $l : 18 \text{ cm}$
 $b : 2 \text{ cm}$

b. $d_1 : 4x$
 $d_2 : x$
 $\frac{1}{2}x \cdot 4x = 72$
 $(x-6)(x+6) = 0$
 $d_1 : 24 \text{ cm}$
 $d_2 : 6 \text{ cm}$

c. $d_1 : x + 6$
 $d_2 : x$
 $\frac{1}{2}x(x+6) = 20$
 $(x-4)(x+10) = 0$
 $d_1 : 10 \text{ cm}$
 $d_2 : 4 \text{ cm}$

d. $p_1 : x + 9$
 $p_2 : x + 3$
 $h : x$
 $\frac{1}{2}x(2x+12) = 40$
 $(x-4)(x+10) = 0$
 $h : 4 \text{ cm}$

Z 64 Weitere Textaufgaben

6401. Prisma: $S = 2s^2 + 4sh$

a. $s : x$
 $h : 8$
 $2x^2 + 4x \cdot 8 = 114$
 $(x-3)(x+19) = 0$
 $s : 3 \text{ cm}$

b. $s : x$
 $h : x + 6$
 $2x^2 + 4x(x+6) = 192$
 $(x-4)(x+8) = 0$
 $s : 4 \text{ cm}$

c. $s : x$
 $h : 3$
 $x^2 = \frac{1}{2} \cdot 4x \cdot 3$
 $x(x-6) = 0$
 $s : 6 \text{ cm}$

6402. Stuhl der Braut: $A = a^2 + b^2$; $u = 4a + 2b$

a. $a : x + 4$
 $b : x$
 $u : 6x + 16$
 $(x+4)^2 + x^2 = 250$
 $(x-9)(x+13) = 0$
 $x = 9$ [oder -13]
 $u : 70 \text{ cm}$

b. $a : x$
 $b : \frac{1}{2}(60 - 4x)$
 $= 30 - 2x$
 $x^2 + (30 - 2x)^2 = 180$
 $(x-12)^2 = 0$
 $x = 12$
 $a : 12 \text{ cm}$
 $b : 6 \text{ cm}$

6403.

	vorher	nachher				
a.	$l : x + 2$	$x - 3$	$x(x+2) = 2x(x-3)$	$u_v : 36 \text{ cm}$		
	$b : x$	$2x$			$x(x-8) = 0$	$u_n : 42 \text{ cm}$
	$u : 4x + 4$	$6x - 6$				
b.	$l : x + 2$	$2x + 4$	$(2x+4)(x-8) = x(x+2) + 40$	$l_n : 40 \text{ cm}$		
	$b : x$	$x - 8$			$(x-18)(x+4) = 0$	$b_n : 10 \text{ cm}$
			$x = 18$ [oder -4]			